

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 6

1. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias lineares

a) $\frac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

b) $\psi' = \psi - t$

c) $x\frac{dy}{dx} + 2y = (x - 2)e^x$

d) $\frac{di}{dt} - 6i = 10 \sin(2t)$

e) $\frac{dy}{dt} = y\left(\frac{1}{t} - \operatorname{tg} t\right) + t \cos t$

f) $(1 + y^2)\frac{dx}{dy} = \operatorname{arctg} y - x$

2. Determine as soluções dos seguintes problemas de Cauchy

a) $xy' = 2y + x^3 e^x$, $y(1) = 0$,

b) $\frac{dv}{du} + \frac{2u}{1+u^2}v - \frac{1}{1+u^2} = 0$, $v(0) = 1$.

c) $\begin{cases} x' + h(t)x - t = 0, \\ x(-1) = 2 \end{cases}$, com $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

3. De acordo com a lei de arrefecimento de Newton, a taxa de arrefecimento de uma substância numa corrente de ar, é proporcional à diferença entre a temperatura da substância e a do ar. Assumindo que a temperatura do ar é 30° e que a substância arrefece de 100° para 70° em 15m, determine o tempo que a substância demora a atingir a temperatura de 40° .

4. Determine todas as soluções das seguintes equações diferenciais ordinárias

a) $x' = \frac{2}{t^2-1}$, $|t| \neq 1$.

b) $x^3 + (y+1)^2 \frac{dy}{dx} = 0$

c) $\varphi' = e^{\varphi-t}$.

d) $xy + (1+x^2)y' = 0$

e) $y' = 1 - x + y^2 - xy^2$.

5. Resolva o problema de Cauchy $\varphi(\theta)\varphi'(\theta) = \theta$, $\varphi(1) = \alpha$ e determine para que valores de α é que a solução está definida para todo o $\theta \in \mathbb{R}$.
6. Considere a equação diferencial separável $x' = x \sin t + x^2 \sin t$. Determine a solução desta equação que satisfaz a condição inicial $x(\frac{\pi}{2}) = -2$, e determine o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere a equação diferencial

$$\dot{y} = f(at + by + c)$$

em que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua.

- a) Mostre que a substituição $v = at + by + c$, transforma a equação numa equação separável.
- b) Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$\dot{y} = e^{2t+y-1} - 2 \quad , \quad y(0) = 1$$

indicando o intervalo máximo de solução.

8. Considere a equação diferencial

$$2x \frac{dy}{dx} + 2xy^5 - y = 0$$

- (a) Determine a solução geral da equação efectuando a mudança de variável $v = y^{-4}$.
- (b) Determine a solução que verifica $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo máximo de existência.

9. Determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2 \cos y \frac{dy}{dx} = 2x \sin y - 1$$

Sugestão: Efectue a mudança de variável $v = \sin y$